Universidade Federal da Bahia
Campus Ondina – Salvador

1ª.PROVA (GABARITO) – MATB34

13 DE JULHO DE 2024

Questão 1 (valor: 2.5)**.** *Os pontos A, B, C e D estão numa mesma reta,* ***exatamente nesta ordem****, de tal forma que:*

(1) o segmento $\overline{AB}$ mede o dobro do segmento $\overline{BC}$ e
(2) o segmento $\overline{CD}$ mede o dobro do segmento $\overline{BC}$.

Sabendo que $A = (0, -1)$ e $D = (5, 9)$, determine as coordenadas de B e C.

Solução possível. Seja $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Sendo assim, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = 2\vec{v}$ e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 5\vec{v}$. Logo $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AD}}{5} = \frac{(5,10)}{5} = (1, 2)$. Finalmente $B = A + \overrightarrow{AB} = A + 2\vec{v} = (0, -1) + 2(1, 2) = (2, 3)$ e $C = B + \overrightarrow{BC} = B + \vec{v} = (2, 3) + (1, 2) = (3, 5)$. □

Questão 2 (valor: 2.5)**.** *Se $M = (0, 3)$, $N = (9, 2)$ e $P = (7, -1)$ são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente, de um triângulo ABC, determinar as coordenadas de A, B e C. Determine também a área de $\triangle ABC$ e as coordenadas do seu baricentro.*

Solução possível. Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$. Sendo assim,

$$\begin{cases} \frac{x_A+x_B}{2} = 0 \\ \frac{x_B+x_C}{2} = 9 \\ \frac{x_C+x_A}{2} = 7 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{y_A+y_B}{2} = 3 \\ \frac{y_B+y_C}{2} = 2 \\ \frac{y_C+y_A}{2} = -1 \end{cases} .$$

Resolvendo os sistemas lineares acima, concluímos que $A = (-2, 0)$, $B = (2, 6)$ e $C = (16, -2)$. Visto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 16 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -116 ,$$

$\triangle ABC$ tem área $\frac{116}{2} = 58$. Já seu baricentro é $\left(\frac{-2+2+16}{3}, \frac{0+6-2}{3}\right) = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}\right)$. □

Solução possível. □

Questão 3 (valor: 2.5)**.** *Determine o ponto da reta $r\colon 3x + y = 17$ mais próximo do ponto $P = (1, 1)$.*

Solução possível. Seja $\vec{n} = (3, 1)$ e deduzimos que $\vec{n} \perp r$. Se s é a reta que passa por P e é perpendicular à reta r, então $P \in s$ e $\vec{n} // s$. Sendo assim, deduzimos equação geral para s:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 3z = -2 .$$

O ponto de r mais próximo de P é o ponto de encontro das retas r e s. Ou seja, tem coordenadas que resolvem o sistema $\begin{cases} 3x + y = 17 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$. Concluímos que o ponto procurado é $\left(\frac{49}{10}, \frac{23}{10}\right)$. □

Questão 4 (valor: 2.5)**.** *Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são tais que $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mostre que $(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v})$ é base ortonormal.*

Solução possível. Dadas as condições sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, deduzimos que $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ e $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}$. Sendo assim,

$$(\vec{u}+\vec{v}) \bullet (\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} - \vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \ ,$$
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}) \bullet (\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 1 \quad \text{e}$$
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v}) \bullet (\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 1 \ .$$

Logo $(\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$ e $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ são unitários. Portanto $(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v})$ é base ortonormal. □